

Robust Optimization of Multi-product and Multi-class Lot-sizing and Supplier Selection with Uncertain Demand

Ghasem Mokhtari^{*}, Fatemeh Bakhtiari^{}**

Abstract

In this study, a multi-product and multi-period lot-sizing and supplier selection problem has been considered. The demand of products is multi-class and uncertain. Due to the interchangeability of products, it is possible to satisfy some part of their demand with the alternatives. In the case of an inventory shortage, a specific part of the shortage will be lost sales and the remainder will be backorder. Suppliers can have an all-units quantity discount policy. For confronting uncertain demand, possible modes are defined as scenarios and the robust optimization approach proposed by Mulvey et al. is applied. The objective function of the problem, which is to be minimized, is made up of the total cost of purchasing, transportation, inventory, demand substitution, lost sales, and backorder. The upper and lower bounds for the number of suppliers per product family are defined as a constraint for the implementation of management policies for supplier selection. Dynamic and multi-class demand in a multi-period horizon, together with allowed backlog and lost sales, are features that, to the best of our knowledge, are not yet considered by other researchers. There are many supply chains that have sold the products and should supply required spare parts. The results of this research help attain optimal ordering of the parts. The performance of the model is examined with a numerical example.

Keywords: Lot Sizing; Supplier Selection; Stochastic Demand; Demand Class; Robust Optimization.

Received: January 4, 2020, Accepted: August 17, 2020

^{*} Assistant Professor, Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering, University of Qom (Corresponding author).

E-mail: g.mokhtari@qom.ac.ir

^{**} MSc, Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering, University of Qom.

بهینه‌سازی استوار انتخاب تأمین‌کننده و تعیین اندازه انباشته چندمحصولی، تحت تقاضای تصادفی و چندکلاسه

قاسم مختاری*، فاطمه بختیاری**

چکیده

در این پژوهش، مسئله انتخاب تأمین‌کننده و تخصیص سفارش چندمحصولی و چنددوره‌ای موردتوجه قرار گرفته است. تقاضای کالاها غیرقطعی و دارای کلاس‌های مختلف است. به دلیل تشابه برخی کالاها، امکان جایگزینی بخشی از تقاضای آن‌ها با یکدیگر وجود دارد. در صورت کمبود موجودی یک کالا و عدم تأمین آن از طریق موجودی کالاهای جایگزین، بخشی از کمبود به‌صورت فروش ازدست‌رفته و بخشی به‌صورت پس‌افت درمی‌آید. تأمین‌کنندگان می‌توانند سیاست تخفیف برای تمامی واحدها داشته باشند. برای مواجهه با عدم قطعیت تقاضا، حالت‌های ممکن تقاضا به‌صورت سناریوهای احتمالی تعریف شده‌اند و از رویکرد بهینه‌سازی استوار ارائه‌شده توسط مالوی و همکاران (۱۹۹۵)، استفاده شده است. تابع هدف مسئله، حداقل‌سازی مجموع هزینه‌های خرید، حمل‌ونقل، نگهداری، جایگزینی، فروش ازدست‌رفته و پس‌افت است. برای اعمال سیاست‌های مدیریت در زمینه انتخاب تأمین‌کنندگان، حدود بالا و پایین برای تعداد تأمین‌کنندگان هر گروه کالا به‌صورت محدودیت تعریف شده است. پویابودن تقاضا در یک افق چنددوره‌ای، ترکیب فروش ازدست‌رفته و پس‌افت و چندکلاسه‌بودن تقاضا، مسئله‌ای ایجاد می‌کند که تاکنون مدلی برای آن ارائه نشده است. زنجیره‌های تأمین بسیاری وجود دارد که محصولاتی را به بازار عرضه کرده‌اند و باید قطعات یدکی مورد نیاز آن‌ها را تأمین کنند. نتایج این پژوهش به تصمیم‌گیری بهینه درباره سفارش‌دهی قطعات در این شرکت‌ها کمک می‌کند.

کلیدواژه‌ها: تعیین اندازه انباشته؛ انتخاب تأمین‌کننده؛ تقاضای غیرقطعی؛ کلاس تقاضا؛ بهینه‌سازی استوار.

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۱۰/۱۴، تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۵/۲۷.

* استادیار، دانشگاه قم (نویسنده مسئول).

E-mail: g.mokhtari@qom.ac.ir

** کارشناسی ارشد، دانشگاه قم.

۱. مقدمه

مسئله تعیین اندازه انباشته چنددوره‌ای^۱ در ساده‌ترین حالت چنین تعریف می‌شود که تقاضای یک محصول در یک افق چنددوره‌ای داده شده است. مقدار سفارش محصول در هر دوره باید به‌گونه‌ای مشخص شود که کل تقاضاها پاسخ داده شوند و مجموع هزینه‌های سفارش و نگهداری موجودی حداقل ممکن باشد [۳۴]. این مدل دارای مفروضات بسیاری است و پژوهشگران برای توسعه کاربردهای مدل، آن‌ها را به چالش کشیده‌اند [۴، ۷، ۱۷]. یکی از توسعه‌ها، مجازشمردن کمبود موجودی در قالب فروش از دست‌رفته یا سفارش‌های پس‌افت یا ترکیبی از آن‌ها است. در این حالت، هزینه‌های کمبود نیز به تابع هدف افزوده خواهد شد.

در اغلب مدل‌های موجودی، تقاضا به‌صورت همگن در نظر گرفته می‌شود؛ درحالی‌که امروزه مشتریان به گروه‌های مختلف طبقه‌بندی می‌شوند و ارزش‌های متفاوتی برای شرکت‌ها ایجاد می‌کنند. وقتی تقاضاها همگن نباشند، آن‌ها را در قالب چند کلاس طبقه‌بندی می‌کنند. معمولاً هر کلاس دارای پیش‌بینی تقاضا و پارامترهای هزینه و درآمد خاص خود است. وقتی چند کلاس تقاضا وجود دارد، ممکن است سهمیه‌بندی موجودی نیز مطرح شود که به معنای ذخیره موجودی برای مشتری‌های با اولویت بالا در مقابل تأخیر یا لغو تحقق تقاضا برای مشتری‌های با اولویت پایین است [۳۵، ۶].

توسعه دیگری که مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است، یکپارچه‌سازی تعیین اندازه انباشته با انتخاب تأمین‌کننده است. انتخاب تأمین‌کننده از تصمیم‌های مهم مدیریت لجستیک محسوب می‌شود. افزایش تعداد تأمین‌کنندگان به افزایش هزینه‌های حمل‌ونقل و سفارش‌دهی منجر می‌شود. امروزه تأمین‌کنندگان سعی می‌کنند با اعمال تخفیف در ازای خرید بیشتر، توان رقابتی خود را افزایش دهند. خریداران باید برای تصمیم‌گیری در مورد مقدار خرید، بین منافع هزینه سفارش و قیمت خرید کمتر در برابر هزینه‌های نگهداری بیشتر تعادل برقرار کنند که این موضوع تصمیم‌گیری را پیچیده‌تر می‌کند [۱۸].

جایگزینی محصول نیز از موضوع‌هایی است که در مبانی نظری موضوع به آن اشاره‌های زیادی شده است و در زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرد که بخشی از کالاها می‌توانند جایگزین یکدیگر باشند. در دنیای واقعی ممکن است یک محصول با توجه به قیمت کمتر یا کمبود محصول مورد تقاضا، جایگزین دیگری شود و از هزینه‌های کمبود وارده به شرکت جلوگیری کند. مفروضات این پژوهش بر اساس مطالعات انجام‌شده در یک شرکت فروشنده قطعات یدکی، تعریف شده‌اند. برای برخی از مواد و قطعات، چندین منبع تأمین وجود دارد که سیاست تخفیف برای تمامی واحدها را ارائه می‌کنند. دو نوع کلاس تقاضا وجود دارد: قطعات مورد نیاز برای

1. Multi-period lot-sizing

نگهداری و تعمیرات محصولات مشمول گارانتی و قطعات موردنیاز برای نگهداری و تعمیرات محصولاتی که دوره گارانتی آن‌ها پایان یافته است. با توجه به وجود برندهای مختلف از برخی قطعات، امکان جایگزینی بخشی از تقاضای آن‌ها با یکدیگر وجود دارد. بخشی از کمبود یک کالا می‌تواند با کالای جایگزین تأمین شود که نسبت آن به کلاس تقاضا بستگی دارد؛ همچنین بخشی از کمبود یک کالا به صورت پس‌افت و مابقی، فروش‌ازدست رفته خواهد بود که این نسبت نیز به کلاس تقاضا وابسته است.

تقاضای محصولات غیرقطعی است. سه رویکرد برنامه‌ریزی تصادفی، نظریه فازی و بهینه‌سازی استوار برای مواجهه با عدم قطعیت داده‌ها به کار رفته‌اند. برای انتخاب رویکرد مناسب باید به نوع عدم قطعیت موجود در داده‌ها و ترجیحات تصمیم‌گیر توجه کرد. ترجیح تصمیم‌گیران این است که مدل بتواند جواب بهینه‌ای ارائه کند که نسبت به تغییرات ممکن در داده‌های تقاضا، نزدیک بهینه و تقریباً موجه باقی بماند. رویکرد برنامه‌ریزی تصادفی با اعمال محدودیت شانس تلاش می‌کند تا احتمال نقض محدودیت‌ها را مدیریت کند؛ اما نمی‌تواند مبادله^۱ بین بهینه‌بودن و موجه‌بودن را لحاظ کند. در این پژوهش از رویکرد استوار ارائه‌شده توسط مالوی^۲ و همکاران (۱۹۹۵)، استفاده شده است [۳۳]. در این رویکرد، تابع هدف دارای سه بخش است: امید ریاضی تابع هدف اصلی، تغییرپذیری تابع هدف نسبت به امید ریاضی و جریمه نقض شدن محدودیت‌ها. با قرارگرفتن مجموع وزنی این عبارات در تابع هدف می‌توان مبادله بین موجه‌بودن و نزدیک بهینه‌بودن را لحاظ کرد.

پرسش اصلی پژوهش این است که در یک افق چنددوره‌ای با وجود هم‌زمان فروش‌ازدست‌رفته و پس‌افت و چندکلاسه‌بودن تقاضا، چگونه می‌توان مقدار خرید هر محصول در هر دوره از هر تأمین‌کننده را به‌گونه‌ای مشخص کرد که هزینه‌های سفارش، خرید، حمل‌ونقل، نگهداری، کمبود و جایگزینی محصول، حداقل ممکن باشند؟ سؤال دوم این است که چگونه می‌توان سیاست‌های مدیریت در زمینه انتخاب تأمین‌کنندگان برای گروه‌های محصولات را در تصمیم‌گیری اعمال کرد؟

پویابودن تقاضا^۳ در یک افق چنددوره‌ای، ترکیب فروش‌ازدست‌رفته و پس‌افت و چندکلاسه‌بودن تقاضا مسئله‌ای ایجاد می‌کند که تاکنون مدلی برای آن ارائه نشده است. امکان جایگزینی تقاضای قطعات، غیرخطی‌بودن هزینه حمل‌ونقل قطعات خریداری‌شده، انتخاب تأمین‌کننده و غیرقطعی‌بودن تقاضای قطعات، ویژگی‌های دیگری است که مدل ارائه‌شده در این پژوهش را با سایر مقاله‌ها متمایزتر می‌کند. برای اعمال سیاست‌های مدیریت در زمینه انتخاب

1. Trade-off

2. Mulvey

3. dynamic demand

تأمین‌کنندگان هر گروه کالا، حد بالا و پایین تعداد تأمین‌کنندگان در هر گروه کالا به صورت محدودیت وارد می‌شود. زنجیره‌های تأمین بسیاری وجود دارد که محصولاتی را به بازار عرضه کرده‌اند و باید قطعات یدکی مورد نیاز آن‌ها را تأمین کنند. معمولاً منابع متعددی برای تأمین قطعات وجود دارد و تقاضا دارای کلاس‌های مختلف است. نتایج این پژوهش به تصمیم‌گیری بهینه درباره سفارش‌دهی قطعات در این شرکت‌ها کمک می‌کند. برای مثال می‌توان محصولات خودرو، تجهیزات راه‌سازی و معادن و ماشین‌آلات صنعتی را نام برد.

در این پژوهش ابتدا مبانی نظری مسئله انتخاب تأمین‌کننده و تخصیص سفارش بررسی می‌شود. خلاصه‌ای از مرور مبانی نظری در حوزه مسئله تعیین اندازه انباشته و انتخاب تأمین‌کننده در بخش دوم ارائه خواهد شد. پس از مشخص شدن مفروضات پژوهش و مرور مبانی نظری، مدل ریاضی با فرض قطعی بودن تقاضا ساخته می‌شود. آنگاه عدم قطعیت تقاضا به صورت سناریوهای احتمالی، تعریف شده و مدل استوار آن با رویکرد ارائه‌شده در پژوهش مالوی^۱ و همکاران (۱۹۹۵)، به دست می‌آید [۲۳]. تابع هدف مسئله دارای سه بخش است: امید ریاضی هزینه‌ها، قدر مطلق انحراف هزینه‌های هر سناریو از میانگین هزینه‌ها و جریمه نقض محدودیت‌های کنترل. تعریف مسئله و مدل‌های ریاضی قطعی و استوار آن در بخش سوم ارائه خواهد شد. در بخش چهارم، یک مثال عددی تحت چند سناریو طراحی شده و تحلیل یافته‌ها و نتایج حاصل از مثال عددی ارائه می‌شود. بخش آخر نیز به نتیجه‌گیری و پیشنهادهایی برای پژوهش‌های آتی اختصاص دارد.

۲. مبانی نظری و پیشینه پژوهش

از زمان ارائه یک الگوریتم برای حل مسئله تعیین اندازه انباشته قطعی توسط واگنر^۲ و ویتین^۳ (۱۹۵۸)، پژوهش‌های بسیاری در این حوزه انجام شده است [۳۴]. جانس^۴ و دگرای^۵ (۲۰۰۸)، بوسکل^۶ و همکاران (۲۰۱۰) و آودنی^۷ و همکاران (۲۰۱۹)، مبانی نظری این حوزه را بررسی کرده‌اند [۱۷، ۷ و ۴]. در این بخش مروری بر مطالعات انجام‌شده به تفکیک دو حوزه تقاضای قطعی و غیرقطعی انجام می‌شود.

تقاضای قطعی. مینر^۸ (۲۰۰۹)، یک روش فراابتکاری برای مسئله موجودی در یک محیط چندمحصولی با تقاضای پویای قطعی و محدودیت ظرفیت انبار یا بودجه موجودی پیشنهاد داد و

-
1. Mulvey
 2. Wagner
 3. Within
 4. Jans
 5. Degraeve
 6. Buschkühl
 7. Aouadni
 8. Minner

این روش فراابتکاری را با روش‌های برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط (MIP)^۱ و دو روش فراابتکاری موجود مقایسه کرد [۲۲]. پسندیده و همکاران (۲۰۱۳)، یک مسئله کنترل موجودی چنددوره‌ای و چندمحصولی را با تقاضای تصادفی و محدودیت فضای ذخیره‌سازی با هدف تعیین مقدار بهینه سفارش محصول در دوره‌های مختلف و حداقل کردن کل هزینه موجودی، توسعه دادند. آن‌ها گزینه تخفیف‌های مقداری افزایشی و تمامی واحدها را هم در نظر گرفتند [۲۵]. لی^۲ و همکاران (۲۰۱۳)، مسئله تعیین اندازه انباشته را با تخفیف مقداری و هزینه حمل‌ونقل با توسعه یک مدل MIP و الگوریتم ژنتیک تجزیه و تحلیل کردند [۱۹]. در دهه‌های اخیر پژوهش‌های بسیاری مدل‌هایی ارائه کرده‌اند که هم‌زمان به تصمیم‌های تعیین اندازه انباشته و انتخاب تأمین کننده می‌پردازند. ربیع و اسماعیلیان (۲۰۱۲)، مسئله انتخاب تأمین کننده و تخصیص سفارش را به صورت یکپارچه در حالت تقاضای پیوسته و فازی مدل‌سازی کردند و هزینه‌های خرید، حمل‌ونقل (خطی)، نگهداری و سفارش‌دهی را در نظر گرفتند [۲۷].

چواری^۳ و شانکار^۴ (۲۰۱۴)، یک مدل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه را برای تصمیم‌گیری در مورد اندازه انباشته موجودی، انتخاب تأمین کننده و انتخاب وسیله نقلیه بررسی کردند [۱۱]. حری و انجم‌شعاع (۲۰۱۶)، انتخاب تأمین کننده و تخصیص سفارش را در حالت چندمحصولی، تک‌دوره‌ای و چندهدفه فازی بررسی کردند [۱۵]. تابع هدف هزینه‌ها شامل هزینه خرید، هزینه محصولات مرجوعی، هزینه کنترل و هزینه سفارش است. غنی‌آبادی و مزینانی (۲۰۱۷)، یک مدل MILP^۵ را برای مسئله تعیین اندازه انباشته پویای تک‌محصولی با انتخاب تأمین کننده و پس‌افت در حضور تخفیف مقداری افزایشی و تمامی واحدها ارائه دادند [۱۴]. نورمحمدی شالکه و همکاران (۲۰۱۸)، یک مدل برنامه‌ریزی ریاضی چندهدفه طراحی کردند که به طور هم‌زمان انتخاب تأمین کننده پایدار و تخصیص سفارش را در یک زنجیره تأمین چنددوره‌ای، چندمحصولی و چند تأمین کننده بررسی می‌کند. آن‌ها تخفیف‌های مقداری افزایشی و تمامی واحدها را نیز در نظر گرفتند [۲۴]. سوتو^۶ و همکاران (۲۰۱۷)، یک مسئله انتخاب تأمین کننده و تعیین اندازه انباشته چنددوره‌ای را با کمبود و تخفیف‌های مقداری افزایشی و تمامی واحدها در نظر گرفتند [۳۲]. آل‌فرز^۷ و ترنادی^۸ (۲۰۱۸)، یک مدل MIP را برای مسئله تعیین اندازه انباشته چندمحصولی با چند تأمین کننده، چندین دوره زمانی، تخفیف‌های مقداری و کمبودهای از نوع پس‌افت ارائه دادند [۲]. چراغعلی‌پور و فرساد (۲۰۱۸)، یک ابزار تصمیم‌گیری برای حل مسئله

-
1. Mixed-Integer Programming
 2. Lee
 3. Choudhary
 4. Shankar
 5. Mixed-Integer Linear Programming
 6. Soto
 7. Alfares
 8. Turnadi

تخصیص سفارش و انتخاب تأمین‌کننده پایدار در محیط‌های با چند تأمین‌کننده، چند دوره و چند محصول و در نظر گرفتن تخفیف‌های مقداری و ریسک‌های اختلال ارائه کردند [۹]. آزادینا (۲۰۱۶)، یک مدل چندهدفه ریاضی برای مسئله تعیین اندازه انباشته چندمحصولی و چنددوره‌ای در حوزه انتخاب تأمین‌کننده پایدار ارائه کرد [۵]. چوزاری^۱ و شانکار^۲ (۲۰۱۳)، یک مدل موجودی تک‌محصولی و چنددوره‌ای را با در نظر گرفتن هزینه حمل‌ونقل توسعه دادند که مقیاس هزینه حمل‌ونقل، فاصله بین خریدار و تأمین‌کننده است [۱۰]. سامبات^۳ و همکاران (۲۰۱۹)، یک مدل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح مختلط برای تعیین اندازه انباشته موجودی و انتخاب تأمین‌کننده با در نظر گرفتن محدودیت فضای ذخیره ارائه کردند [۳۰].

دینگ^۴ و همکاران (۲۰۰۷)، یک سیستم با چند کلاس مشتری در نظر گرفتند که هر یک دارای قیمت‌های نرمال و تخفیف، نرخ تقاضا و پاسخ به تخفیف هستند. آن‌ها مسئله خرید و تخصیص موجودی به چندین کلاس از مشتریان را زمانی که برای تقاضای برآورده‌نشده، پس‌افت جزئی مبتنی بر قیمت وجود دارد، بررسی کردند [۱۲]. مشتریان همواره قادر به خرید محصولاتی که ترجیح می‌دهند نیستند. این تقاضای برآورده‌نشده اغلب با یک محصول جایگزین برآورده می‌شود. محصولات قابل‌جایگزین، محصولاتی هستند که در صورت دسترسی‌نداشتن به آن‌ها، محصول جایگزین به مشتری پیشنهاد می‌شود. شین^۵ و همکاران (۲۰۱۵)، انواع پژوهش‌های صورت‌گرفته در مورد جایگزینی محصولات را طبقه‌بندی کردند [۳۱]. جبینی^۶ و همکاران (۲۰۱۵)، مسئله زمان‌بندی محصول را با در نظر گرفتن طبقه‌بندی محصول و جایگزینی تقاضا بررسی کردند [۱۳]. آن‌ها یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط پیشنهاد دادند و اعتبار مدل را با بحث در یک مطالعه موردی در صنعت آب‌جوسازی بررسی کردند.

تقاضای غیرقطعی. لی^۷ و تورستنسن^۸ (۲۰۱۴)، یک مسئله مشترک تعیین اندازه انباشته و قیمت‌گذاری با تقاضای تصادفی و در نظر گرفتن محدودیت‌های ظرفیت و پس‌افت در طول یک افق برنامه‌ریزی چندمرحله‌ای محدود را بررسی کردند و یک الگوریتم فراابتکاری مؤثر چندمرحله‌ای برای حل بهینه ارائه دادند [۲۰]. روسی^۹ و همکاران (۲۰۱۲)، سیاست تولید/موجودی چنددوره‌ای با تقاضای تصادفی غیرایستا و زمان تدارک تأمین‌کننده تحت

-
1. Choudhary
 2. Shankar
 3. Sambatt
 4. Ding
 5. Shin
 6. Gebennini
 7. Li
 8. Thorstenson
 9. Rossi

محدودیت‌های سطح خدمات را نشان دادند. آن‌ها دو الگوریتم ترکیبی برنامه‌ریزی محدودیت و جست‌وجوی محلی را برای محاسبه پارامترهای سیاست نزدیک به بهینه پیشنهاد کردند [۲۹].

ژانگ^۱ و ژانگ (۲۰۱۱)، یک مدل MILP برای حل مسئله انتخاب تأمین کننده با تقاضای تصادفی ارائه کردند [۴۱]. آن‌ها تأمین کنندگان را انتخاب کردند و مقدار سفارش را به تأمین کنندگان انتخاب شده اختصاص دادند تا هزینه‌های کل را که شامل انتخاب، خرید، نگهداری و کمبود است به حداقل برسانند. آگارول^۲ و سینگ^۳ (۲۰۱۵)، مسئله انتخاب تأمین کننده چندهدفه را با استفاده از محدودیت شانس تحت سناریوهای تصادفی مدل کردند. آن‌ها عدم اطمینان مربوط به ظرفیت تأمین کننده، تقاضای محصول، حمل و نقل، هزینه‌های متغیر و توزیع احتمالی زمان تدارک را در نظر گرفتند [۱]. زنجانی و همکاران (۲۰۱۰)، یک مسئله برنامه‌ریزی تولید را با توجه به عدم اطمینان در کیفیت مواد خام کارخانه چوب چندمحصولی و چنددوره‌ای پیشنهاد کردند [۴۰]. آن‌ها دو مدل بهبودسازی استوار را با اندازه‌گیری متغیرهای مختلف پیشنهاد کردند و توازن بین استواری طرح و مصرف مواد خام و هزینه پس‌افت / موجودی موردانتظار را بررسی کردند. رحمانی و همکاران (۲۰۱۳)، یک مدل استوار برای برنامه‌ریزی تولید چندمحصولی و چندمرحله‌ای را با توجه به محدودیت ظرفیت در شرایط عدم اطمینان به مبانی نظری اضافه کردند [۲۸]. آن‌ها یک مدل دومرحله‌ای را برای فرمول‌بندی مسئله برنامه‌ریزی تولید استوار توسعه دادند و برای تأیید اعتبار مدل، یک کارخانه یخچال و فریزر در ایران را بررسی و تحلیل کردند. وانگ^۴ و لی^۵ (۲۰۱۹)، مسئله انتخاب تأمین کننده چنددوره‌ای و چندمحصولی را با مدیریت موجودی و تخصیص وسایل نقلیه در محیط‌های غیرقطعی بررسی کردند [۳۷]. تاپکیس^۶ (۱۹۶۸)، یک مدل موجودی با چند کلاس تقاضا را در نظر گرفت و نشان داد که در یک آستانه وابسته به کلاس، سیاست موجودی پایه بهینه است و سیاست‌های جیره‌بندی بهینه می‌توانند با مجموعه‌ای از محدودیت‌های کنترل مشخص شوند [۳۳]. او یک دوره را به فواصلی تقسیم کرد که ممکن بود طول یکسان نداشته باشند و وجود سطوح جیره‌بندی بهینه را در انتهای هر زیر فاصله ثابت کرد. هانگ^۷ و هسیاو^۸ (۲۰۱۳)، یک رویکرد جیره‌بندی پویای فراابتکاری برای یک محیط با کلاس‌های تقاضای چندگانه و فرایندهای تقاضای عمومی ارائه دادند [۱۶]. وانگ^۹ و تانگ^{۱۰} (۲۰۱۴)، یک سیاست جیره‌بندی پویا را برای

-
1. Zhang
 2. Aggarwal
 3. Singh
 4. Wang
 5. Li
 6. Topkis
 7. Hung
 8. Hsiao
 9. Wang
 10. Tang

یک سیستم موجودی با ترکیبی از پس‌افت و فروش ازدست‌رفته بررسی کردند [۳۶]. آلفی‌اری^۱ و همکاران (۲۰۱۷)، دو رویکرد جیره‌بندی پویا را براساس سطوح خدمت و هزینه جریحه متفاوت پیشنهاد دادند. این پژوهشگران از داده‌های واقعی برای آزمایش کارایی تجربی استفاده کردند [۳]. چن^۲ و همکاران (۲۰۱۰)، یک سیستم موجودی مرور دوره‌ای را برای موارد پس‌افت بررسی تجزیه و تحلیل کردند و مقدار سفارش و سیاست جیره‌بندی را زمانی که دو کلاس تقاضا وجود دارد، تعیین کردند [۸].

یوزل^۳ و همکاران (۲۰۰۹)، یک مسئله خط تولید یک دوره‌ای را در نظر گرفتند و یک مدل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح ترکیبی را پیشنهاد دادند. آن‌ها طبقه‌بندی محصول و برنامه‌ریزی موجودی را تحت جایگزینی تقاضای مشتق‌شده از مشتری با بررسی اثر سه پارامتر هزینه جایگزینی، هزینه انتخاب تأمین‌کننده و محدودیت فضای انبار تجزیه و تحلیل کردند. آن‌ها مدل را سه بار و هر بار با چشم‌پوشی از یکی از فرض‌ها حل کردند و نتیجه گرفتند که در نظر نگرفتن جایگزینی مصرف‌کننده، انتخاب تأمین‌کننده و محدودیت فضا همه تأثیر زیادی بر کارایی طبقه‌بندی در بخش خرده‌فروشی دارد [۳۹].

خلاصه‌ای از مرور مبانی نظری پژوهش در جدول ۱، ارائه شده است. طبق جدول ۱، فقط دو پژوهش وجود دارد که ترکیب فروش ازدست‌رفته و پس‌افت را با تقاضای چندکلاسه در نظر گرفته‌اند. در پژوهش وانگ و تانگ (۲۰۱۴)، دو کلاس تقاضا وجود دارد که یکی از آن‌ها برای فروش ازدست‌رفته و دیگری برای پس‌افت است [۳۶]. تقاضای محصول به‌صورت تصادفی و ایستا است؛ یعنی تابع توزیع آن در طول زمان ثابت است. در پژوهش دینگ^۴ و همکاران (۲۰۰۷)، نیز تقاضا به‌صورت قطعی و ایستا است [۱۲]؛ بنابراین تاکنون برای مسئله تعیین اندازه انباشته با پویا بودن تقاضا^۵ در یک افق چنددوره‌ای، ترکیب فروش ازدست‌رفته و پس‌افت و چند-کلاسه بودن تقاضا مدلی دیده نشده است. چندمحصولی بودن و امکان جایگزینی تقاضای قطعات، غیرخطی بودن هزینه حمل‌ونقل قطعات خریداری‌شده و وابستگی آن به وزن محموله، انتخاب تأمین‌کننده و غیرقطعی بودن تقاضای قطعات، ویژگی‌های دیگری است که مدل ارائه‌شده در این پژوهش را از سایر پژوهش‌ها متمایزتر می‌کند.

1. Alfieri
2. Chen
3. Yücel
4. Ding
5. Dynamic Demand

جدول ۱. خلاصه مرور مبانی نظری

پژوهشگران	فضای مسئله						دوره	کمبود
	تعیین اندازه ابیاخته	انتخاب تأمین کننده	محدودیت ظرفیت	هزینه حمل و نقل	زمان	پول		
Koo et al. (2011)	✓	✓			✓	✓		
Minner (2009)	✓	✓			✓		✓	
Pasandideh et al. (2013)	✓	✓			✓		✓	
Lee et al. (2013)	✓			✓	✓			
Su & Wong (2008)	✓			✓			✓	
Tarim et al. (2011)	✓	✓		✓			✓	
Li & Thorstenson (2014)	✓		✓		✓		✓	
Rossi et al. (2012)	✓	✓		✓			✓	
Ghaniabadi & Mazinani (2017)	✓	✓			✓		✓	
Choudhary & Shankar (2013)	✓	✓		✓	✓		✓	
Sambatt et al. (2019)	✓	✓	✓			✓		
Choudhary & Shankar (2014)	✓	✓	✓	✓	✓		✓	
Nourmohamadi Shalke et al. (2018)	✓	✓	✓	✓		✓	✓	
Soto et al. (2017)	✓	✓		✓	✓		✓	
Alfares & Turnadi (2018)	✓	✓		✓			✓	
Cheraghalipour & Farsad (2018)	✓	✓	✓	✓		✓	✓	
Azadnia (2016)	✓	✓		✓			✓	
Zhang & Zhang (2011)	✓	✓			✓		✓	
Aggarwal & Singh (2015)	✓	✓		✓		✓		
Topkis (1968)	✓				✓		✓	
Hung & Hsiao. (2013)	✓				✓		✓	
Wang & Tang (2014)	✓				✓		✓	
Alfieri et al. (2017)	✓				✓		✓	
Chen et al. (2010)	✓				✓		✓	
Ding et al. (2007)	✓		✓		✓		✓	
Yücel et al. (2009)	✓	✓					✓	
Gebennini et al. (2015)						✓	✓	
Zanjani et al. (2010)	✓					✓	✓	
Rahmani et al. (2013)	✓			✓			✓	
Wang & Li (2019)	✓	✓		✓			✓	
This study	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

جدول ۱. خلاصه مرور مباحث نظری (ادامه)

پژوهشگران	نوع تقاضا				رویکرد مدل‌سازی عدم قطعیت
	قطعی	غیر قطعی	تخفیف	وابستگی	کلاس تقاضا
	✓				
Koo et al. (2011)	✓				
Minner (2009)	✓		✓		
Pasandideh et al. (2013)	✓		✓		
Lee et al. (2013)		✓			
Su & Wong (2008)		✓			Relaxation
Tarim et al. (2011)		✓	✓		Robust(scenario)
Li & Thorstenson (2014)		✓			Robust(scenario)
Rossi et al. (2012)	✓		✓		
Ghaniabadi & Mazinani (2017)	✓		✓		
Choudhary & Shankar (2013)	✓				
Sambatt et al. (2019)	✓		✓		
Choudhary & Shankar (2014)	✓		✓		
Nourmohamadi Shalke et al. (2018)	✓		✓		
Soto et al. (2017)	✓		✓		
Alfares & Turnadi (2018)	✓		✓		
Cheraghalipour & Farsad (2018)	✓		✓		
Azadnia (2016)		✓			
Zhang & Zhang (2011)		✓			Chance
Aggarwal & Singh (2015)		✓		✓	
Topkis (1968)		✓		✓	
Hung & Hsiao. (2013)		✓		✓	
Wang & Tang (2014)		✓		✓	
Alfieri et al. (2017)		✓		✓	
Chen et al. (2010)	✓				
Ding et al. (2007)		✓		✓	
Yücel et al. (2009)	✓			✓	
Gebennini et al. (2015)		✓			Robust (scenario)
Zanjani et al. (2010)		✓			Robust (scenario)
Rahmani et al. (2013)		✓			Robust weighted goal programming
Wang & Li (2019)	✓	✓	✓	✓	Robust (scenario)

۳. روش شناسی پژوهش

تعریف مسئله. مفروضات این پژوهش بر اساس مطالعات انجام شده در یک شرکت فروشنده تجهیزات تعریف شده است. این شرکت، هزاران دستگاه از تجهیزات متنوع را در بازار ایران به فروش رسانده است. محصولات عرضه شده به بازار، نیاز به قطعات یدکی دارند. یکی از واحدهای زیرمجموعه این شرکت، قطعات یدکی و مواد مصرفی مورد نیاز مشتریان را از تأمین کنندگان خریداری و به بازار عرضه می کند. همواره برخی از محصولات شرکت در دوره گارانتی^۱ قرار دارند. شرکت تعهد دارد قطعات یدکی مشمول گارانتی این محصولات را به صورت رایگان تأمین کند. در صورت وقوع کمبود موجودی برای این نوع از تقاضا هزینه کمبود نسبتاً بالا است و اغلب مشتریان، منتظر تأمین قطعه می مانند؛ اما برخی محصولات نیز از دوره گارانتی خارج شده اند و تأمین قطعات یدکی مورد نیاز آنها یک کسب و کار سودآور است. عدم تأمین این نوع از تقاضا، هزینه کمبود کمتری ایجاد می کند و معمولاً درصد بالاتری از کمبودها به فروش از دست رفته منجر می شوند. همه تقاضاهای پس افت شده تا پایان افق برنامه ریزی باید برآورده شوند؛ بنابراین تقاضا دارای دو کلاس است: تقاضای قطعات یدکی برای محصولات دارای گارانتی و تقاضا برای قطعات یدکی محصولات بدون گارانتی.

برای بسیاری از قطعات چندین تأمین کننده وجود دارد. قیمت فروش برخی از تأمین کنندگان به میزان خرید وابسته است. در این پژوهش، سیاست تخفیف برای تمامی واحدها در نظر گرفته شده است. هزینه حمل و نقل قطعات از تأمین کننده تا انبار شرکت، تابعی کاملاً خطی نیست. کل کالاهای خریداری شده از هر تأمین کننده در هر دوره به صورت یک محموله منتقل می شود. هزینه حمل و نقل از هر تأمین کننده به صورت تابع خطی قطعه قطعه^۲ از وزن محموله در نظر گرفته شده است.

برخی از قطعات یدکی با برندهای مختلفی در بازار وجود دارند. از نظر فنی این قطعات قابل جایگزینی هستند؛ بنابراین در صورت نبود یکی از قطعات، بخشی از تقاضای آن توسط قطعه مشابه قابل تأمین است. پذیرش جایگزینی قطعات به کلاس تقاضا نیز بستگی دارد. در مورد قطعات دارای گارانتی، چون برای مشتری رایگان هستند، انعطاف بیشتری وجود دارد و امکان جایگزینی قطعات مشابه با یکدیگر بالا است؛ اما در مورد قطعات فاقد گارانتی، تصمیم گیرنده اصلی مشتری است و ممکن است نپذیرد. جایگزینی ها فقط برای موجودی است و شامل پس افت نمی شود؛ یعنی اگر قطعه مشابه نیز موجودی نداشته باشد، فروش از دست رفته و پس افت برای قطعه اصلی رخ می دهد.

1. guarantee

2. piece-wise linear function

در این پژوهش برای اعمال سیاست‌های مدیریت در زمینه انتخاب تأمین‌کنندگان، حدود بالا و پایین برای تعداد تأمین‌کنندگان هر گروه کالا به صورت محدودیت وارد می‌شود. مقدار سفارش هر محصول از هر تأمین‌کننده را باید به صورت بهینه تعیین کرد تا هزینه موجودی حداقل شود.

سایر مفروضات مسئله عبارت‌اند از:

- مدت زمان تأمین قطعات، قطعی و مشخص است؛
- سفارش‌های صادره برای هر دوره در ابتدای آن دوره دریافت می‌شوند؛
- بخش ثابتی از کمبود هر کالا به صورت پس‌افت و مابقی به صورت فروش ازدست‌رفته خواهد بود. این نسبت، به کلاس تقاضا نیز بستگی دارد؛
- هزینه فروش ازدست‌رفته با مقدار آن، رابطه مستقیم دارد؛
- هزینه پس‌افت با مدت آن، رابطه مستقیم دارد.

مدل‌سازی ریاضی. ابتدا نمادهای به کار رفته در مدل‌سازی معرفی می‌شوند.

شاخص‌ها

$i = 1, 2, \dots, I$	محصول	i
$j = 1, 2, \dots, J$	دوره	j
$s = 1, 2, \dots, S$	تأمین‌کننده	s
$k = 1, 2, \dots, K$	نقاط شکست قیمت در سیاست تخفیف تأمین‌کنندگان	k
$l = 1, 2$	کلاس تقاضا	l
$g = 1, 2, \dots, G$	گروه کالا	g
	اندیس محصولات جایگزین	v
$o = 1, 2, \dots, O$	نقاط شکست وزن در تابع هزینه حمل‌ونقل	o

پارامترها

	عدد بسیار بزرگ	M
	مجموعه کالاهای عضو گروه کالای g	S_g
	مجموعه کالاهای قابل جایگزین با محصول i	C_i
	هزینه ثابت هر بار سفارش به تأمین‌کننده s	A_s
	هزینه هر بار سفارش کالای i در دوره j به تأمین‌کننده s	a_{ijs}
	نقطه شکست قیمت k ام محصول i در دوره j از تأمین‌کننده s	q_{ijs}^k

- p_{ijs}^k : هزینه خرید هر واحد کالای i در دوره j از تأمین‌کننده s در نقطه شکست قیمت k
 h_i : هزینه نگهداری محصول i برای هر واحد از هر زمان
 D_{ij}^l : مقدار تقاضای محصول i در دوره j از نوع l (در مدل قطعی)
 π_i^l : هزینه پس‌افت هر واحد از محصول i از تقاضای نوع l
 $\bar{\pi}_i^l$: هزینه فروش از دست‌رفته هر واحد از محصول i از تقاضای نوع l
 a_{iv}^l : هزینه جریمه جایگزینی هر واحد تقاضای نوع l محصول i با محصول v
 b_{jsO} : نقطه شکست O ام تابع هزینه حمل‌ونقل از تأمین‌کننده s در دوره j (نقاط محور افقی)
 fb_{jsO} : نقطه شکست O ام تابع هزینه حمل‌ونقل از تأمین‌کننده s در دوره j (نقاط محور عمودی)
 β_i^l : درصدی از کمبود تقاضای نوع l محصول i که پس‌افت می‌شود (مابقی، فروش از دست‌رفته خواهد بود)
 γ_{iv}^l : نسبتی از مشتریان کلاس l که محصول v را به جای i می‌پذیرند.
 Lq_{ijs} : حد پایین مقدار سفارش
 Uq_{ijs} : حد بالای مقدار سفارش
 Lb_g : حد پایین تعداد تأمین‌کنندگان گروه کالای g
 Ub_g : حد بالای تعداد تأمین‌کنندگان گروه کالای g
 H_s : تابع هزینه حمل و نقل از تأمین‌کننده s

متغیرهای تصمیم

- r_{js} : متغیر صفر و یک است؛ اگر در دوره j از تأمین‌کننده s سفارش داده شود، مقدار ۱ و در غیر این صورت مقدار صفر می‌گیرد.
 w_{ijs} : متغیر صفر و یک است؛ اگر کالای i در دوره j از تأمین‌کننده s خریداری شود، مقدار ۱ و در غیر این صورت مقدار صفر می‌گیرد.
 U_{ijs}^k : متغیر صفر و یک است؛ اگر محصول i در بازه شکست قیمت k در دوره j از تأمین‌کننده s خریداری شود، مقدار ۱ و در غیر این صورت مقدار صفر می‌گیرد.
 Q_{ijs} : مقدار سفارش محصول i در دوره j از تأمین‌کننده s
 x_{ivj}^l : مقدار تقاضای محصول i از کلاس l که در دوره j به تقاضای محصول v تبدیل می‌شود.

- I_{ij}^+ : موجودی در دسترس (نامنفی) محصول i در پایان دوره j
- I_{ij}^{l-} : باقی مانده پس‌افت محصول i در پایان دوره j از تقاضای نوع l
- λ_{jso} : متغیر پیوسته بین صفر و یک؛ اگر وزن محموله خریداری شده از تأمین‌کننده s در دوره j در بازه o از تابع خطی قطعه‌قطعه‌ی هزینه حمل‌ونقل قرار گرفته باشد، مقدار مثبت و در غیر این صورت مقدار صفر می‌گیرد.
- y_{jso} : متغیر صفر و یک؛ اگر وزن محموله خریداری شده از تأمین‌کننده s در دوره j در بازه o از تابع خطی قطعه‌قطعه‌ی هزینه حمل‌ونقل قرار گرفته باشد، مقدار یک و در غیر این صورت مقدار صفر می‌گیرد.
- N_{sg} : متغیر صفر و یک؛ اگر حداقل یک کالا از گروه g از تأمین‌کننده s خریداری شود، مقدار یک و در غیر این صورت مقدار صفر می‌گیرد.
- ρ_{ijs}^k : متغیر خطی‌ساز هزینه خرید؛ مقدار سفارش محصول i در دوره j از تأمین‌کننده s در بازه شکست قیمت k
- d_{ij}^l : سفارش‌های پس‌افت تحویل‌شده محصول i در دوره j از تقاضای نوع l
- E_{ij}^l : فروش محصول i در دوره j از تقاضای نوع l

مدل اولیه عدد صحیح مختلط. تابع هدف مسئله، حداقل‌سازی مجموع هزینه‌های سفارش، خرید، حمل‌ونقل، نگهداری، کمبود، و جایگزینی است.

هزینه سفارش: هزینه سفارش دو بخش دارد: بخشی که ثابت است و مستقل از تعداد اقلام موجود در سفارش خرید است. در بخش دوم هزینه سفارش به‌ازای هر کالا، هزینه جداگانه‌ای لحاظ خواهد شد.

$$\sum_{j=1}^J \sum_{s=1}^S A_s r_{js} + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{s=1}^S a_{ijs} w_{ijs} \quad \text{رابطه (۱)}$$

هزینه خرید: فرض بر این است که هر تأمین‌کننده برای هر کالا در هر دوره، یک سیاست تخفیف مشخص ارائه می‌کند. سیاست تخفیف برای تمامی واحدها در نظر گرفته شده است؛ بنابراین تابع قیمت به‌صورت رابطه ۲، تعریف می‌شود:

$$P_{ijs} = \begin{cases} P_{ijs}^{\downarrow} & 0 \leq Q_{ijs} \leq q_{ijs}^{\downarrow} \\ P_{ijs}^{\uparrow} & q_{ijs}^{\downarrow} \leq Q_{ijs} \leq q_{ijs}^{\uparrow} \\ \vdots & \vdots \\ P_{ijs}^k & q_{ijs}^k \leq Q_{ijs} \end{cases} \quad \text{رابطه (۲)}$$

در نتیجه هزینه خرید به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{s=1}^S \sum_{k=1}^K Q_{ijs} P_{ijs}^k U_{ijs}^k \quad \text{رابطه (۳)}$$

هزینه نگهداری: هزینه نگهداری برای کل افق برنامه‌ریزی، جمع هزینه نگهداری برای هر دوره است.

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J h_i I_{ij}^+ \quad \text{رابطه (۴)}$$

هزینه کمبود: فرض بر این است که به‌ازای هر کالا و هر کلاس تقاضا، بخش مشخصی از کمبود به‌صورت پس‌افت و بخشی نیز به‌صورت فروش ازدست‌رفته خواهد بود. نسبت پس‌افت با β_i^l و نسبت فروش از دست‌رفته با $(1 - \beta_i^l)$ نشان داده شده است. هزینه پس‌افت و فروش ازدست‌رفته به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^L \pi_i^l I_{ij}^{l-} \quad \text{رابطه (۵)}$$

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^L \pi_i^l (1 - \beta_i^l) (D_{ij}^l - E_{ij}^l - \sum_{v \in C_i^l} x_{ivj}^l) \quad \text{رابطه (۶)}$$

هزینه حمل‌ونقل: برای محاسبه هزینه حمل‌ونقل برای هر تأمین‌کننده s در هر دوره j یک تابع $H_{js}(x)$ وجود دارد که مشخص می‌کند اگر وزن محموله x باشد، هزینه حمل آن محموله از تأمین‌کننده s چقدر خواهد بود. تابع هزینه حمل‌ونقل هر تأمین‌کننده به‌صورت خطی قطعه‌قطعه در نظر گرفته می‌شود:

$$H_{js}(x) = \begin{cases} fb_{js1} + xC_{s1} & b_{js1} \leq x \leq b_{js2} \\ fb_{js2} + xC_{s2} & b_{js2} \leq x \leq b_{js3} \\ fb_{js3} + xC_{s3} & b_{js3} \leq x \leq b_{js4} \end{cases} \quad \text{رابطه (۷)}$$

برای مدل‌سازی تابع H از متغیرهای کمکی λ و γ استفاده می‌شود که متغیرهای λ پیوسته و γ ها باینری هستند.

$$H_{js}(x) = \lambda_{js1} fb_{js1} + \lambda_{js2} fb_{js2} + \lambda_{js3} fb_{js3} + \lambda_{js4} fb_{js4} + \dots \quad \text{رابطه (۸)}$$

طبق رابطه ۸، تابع هزینه از ترکیب محدب نقاط شکست محاسبه می‌شود؛ البته باید به این موضوع توجه داشت که از میان λ_{js} ها نهایتاً ۲ تا باید مقدار غیرصفر بگیرد. با توجه به اینکه هزینه محموله خریداری شده از تأمین‌کننده s در دوره j برابر $\sum_{o=1}^O \lambda_{jsO} fb_{jsO}$ خواهد بود، کل هزینه حمل‌ونقل به صورت زیر است:

$$\sum_{j=1}^J \sum_{s=1}^S \sum_{o=1}^O \lambda_{jsO} fb_{jsO} \quad \text{رابطه (۹)}$$

هزینه جایگزینی: برای محاسبه هزینه جریمه جایگزینی محصولات از رابطه ۱۰، استفاده می‌شود:

$$\sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^I \sum_{v \in C_i} \alpha_{iv}^l x_{ivj}^l \quad \text{رابطه (۱۰)}$$

در نتیجه تابع هدف کلی به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z_1 = & \sum_{j=1}^J \sum_{s=1}^S A_s r_{js} + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{s=1}^S a_{ijs} w_{ijs} + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{s=1}^S \sum_{k=1}^K \rho_{ijs}^k p_{ijs}^k \\ & + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J h_i I_{ij}^+ + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^L \pi_i^l I_{ij}^{l-} + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^L \bar{\pi}_i^l (1 - \beta_i^l)(D_{ij}^l - E_{ij}^l - \sum_{v \in C_i} x_{ivj}^l) \\ & + \sum_{j=1}^J \sum_{s=1}^S \sum_{o=1}^O \lambda_{jsO} fb_{jsO} + \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^I \sum_{v \in C_i} \alpha_{iv}^l x_{ivj}^l \end{aligned} \quad \text{رابطه (۱۱)}$$

محدودیت‌های مدل به شرح زیر است:

s.t :

$$Q_{ijs} \leq w_{ijs} M \quad \forall i, j, s \quad \text{رابطه (۱۲)}$$

$$Q_{ijs} \leq r_{js} M \quad \forall i, j, s \quad \text{رابطه (۱۳)}$$

$$U_{ijs}^k q_{ijs}^{k-1} \leq Q_{ijs} \leq M(1 - U_{ijs}^k) q_{ijs}^k + U_{ijs}^k q_{ijs}^k \quad \forall i, j, s, k \quad \text{رابطه (۱۴)}$$

$$\sum_{k=1}^K U_{ijs}^k \leq 1 \quad \forall i, j, s \quad \text{رابطه (۱۵)}$$

$$Q_{ijs} \leq \left(\sum_{k=1}^K U_{ijs}^k \right) M \quad \forall i, j, s \quad \text{رابطه (۱۶)}$$

$$\sum_{k=1}^K U_{ijs}^k \leq Q_{ijs} M \quad \forall i, j, s \quad \text{رابطه (۱۷)}$$

$$d_{ij}^l \leq I_{i(j-1)}^{l-} \quad \forall i, j, l \quad \text{رابطه (۱۸)}$$

$$I_{ij}^+ = I_{i(j-1)}^+ + \sum_{s=1}^S Q_{ijs} - \sum_{l=1}^L d_{ij}^l - \sum_{l=1}^L E_{ij}^l - \sum_{l=1}^L \sum_{v \in C_i} x_{vij}^l \quad \forall i, j \quad \text{رابطه (۱۹)}$$

$$x_{ivj}^l \leq (D_{ij}^l - E_{ij}^l) \gamma_{iv}^l \quad \forall i, v, j, l \quad \text{رابطه (۲۰)}$$

$$I_{ij}^{l-} = I_{i(j-1)}^{l-} + \beta_i^l (D_{ij}^l - E_{ij}^l - \sum_{v \in C_i} x_{ivj}^l) - d_{ij}^l \quad \forall i, j, l \quad \text{رابطه (۲۱)}$$

$$\sum_o \lambda_{jso} b_{jso} = \sum_i g_i Q_{ijs} \quad \forall j, s \quad \text{رابطه (۲۲)}$$

$$\lambda_{jso} \leq y_{jso} + y_{js(o-1)} \quad \forall j, s, o \quad \text{رابطه (۲۳)}$$

$$\lambda_{jsO} \leq y_{js(O-1)} \quad \forall j, s, o \quad \text{رابطه (۲۴)}$$

$$\sum_o y_{jso} = r_{js} \quad \forall j, s \quad \text{رابطه (۲۵)}$$

$$\sum_o \lambda_{jso} = r_{js} \quad \forall j, s \quad \text{رابطه (۲۶)}$$

$$\sum_{j=1}^J \sum_{i \in S_g} w_{ijs} \leq N_{sg} M \quad \forall g, s \quad \text{رابطه (۲۷)}$$

$$Lb_g \leq \sum_{s=1}^S N_{sg} \leq Ub_g \quad \forall g \quad \text{رابطه (۲۸)}$$

$$I_{ij}^{l-} = 0 \quad \forall i, l \quad \text{رابطه (۲۹)}$$

$$y_{jso}, r_{js}, w_{ijs}, U_{ijs}^k, N_{sg} \in \{0, 1\} \quad \text{رابطه (۳۰)}$$

$$Q_{ijs}, E_{ij}^l, d_{ij}^l, x_{ivj}^l, \lambda_{jso}, I_{ij}^+, I_{ij}^{l-} \geq 0 \quad \text{رابطه (۳۱)}$$

$$\text{رابطه (۳۲)}$$

محدودیت‌های ۱۲ و ۱۳، ارتباط بین متغیر مقدار سفارش و متغیرهای باینری سفارش را برقرار می‌کنند؛ یعنی متغیر Q_{ijs} زمانی می‌تواند مثبت شود که متغیر باینری متناظر با آن، مقدار ۱ گرفته باشد. محدودیت ۱۴، تضمین می‌کند که اگر خرید محصول i در دوره j از تأمین‌کننده s در بازه k تخفیف قرار دارد (متغیر باینری U)، مقدار خرید Q_{ijs} بین حد پایین q_{ijs}^{k-1} و حد بالای q_{ijs}^k قرار گیرد. محدودیت ۱۵، این اطمینان را می‌دهد که فقط یکی از بازه‌های تخفیف، قابل استفاده است. محدودیت ۱۶ و ۱۷، رابطه بین Q_{ijs} و U_{ijs}^k را برقرار می‌کنند و تضمین می‌کنند که Q_{ijs} ها وقتی می‌توانند مقدار بگیرند که U_{ijs}^k ها مقدار گرفته باشند و

برعکس. ضرورت وجود محدودیت‌های ۱۶ و ۱۷ از آنجا ناشی می‌شود که در محدودیت ۱۴، ممکن است همه متغیرهای U_{ijs}^k متناظر با یک Q_{ijs} صفر شوند؛ اما Q_{ijs} مقدار مثبت بگیرد. محدودیت ۱۸، تضمین می‌کند که در هر دوره، حداکثر برابر با سفارش‌های پس‌افت باقیمانده دوره قبل، تحویل داده شود. محدودیت ۱۹، موجودی باقیمانده محصول i را در پایان دوره j محاسبه می‌کند. محدودیت ۲۰، نشان می‌دهد که مقدار جایگزینی‌های انجام‌شده، حداکثر برابر با نسبتی از مقدار تقاضای برآورده‌نشده است. محدودیت ۲۱، این اطمینان را می‌دهد که باقیمانده پس‌افت محصول در هر دوره برابر با باقیمانده پس‌افت دوره قبل به علاوه سفارش‌های پس‌افت‌شده محصول در این دوره منهای مقدار سفارش‌های پس‌افت تحویل‌شده در این دوره است. محدودیت‌های ۲۲ تا ۲۶، مدلسازی تابع خطی قطعه‌قطعه را برای هزینه حمل‌ونقل نشان می‌دهند. محدودیت ۲۷، ارتباط بین متغیرهای باینری سفارش w و متغیر باینری N_{sg} را برقرار می‌کند. محدودیت ۲۸، حد بالا و پایین تعداد تأمین‌کنندگان گروه کالای g ام را اعمال می‌کند. محدودیت ۲۹، تضمین می‌کند که سفارش‌های پس‌افت در انتهای افق برنامه‌ریزی صفر خواهند شد.

از مدل ارائه‌شده، بخش‌های مربوط به تخفیف‌ها، انتخاب تأمین‌کننده و تابع خطی قطعه‌قطعه، قبلاً به‌طور جداگانه در سایر پژوهش‌ها ارائه شده‌اند؛ اما بخش‌های مربوط به پس‌افت‌ها، فروش از دست‌رفته، جایگزینی‌ها، موجودی پایان دوره و محدودیت مربوط به تعداد تأمین‌کنندگان هر گروه کالا از نتایج این پژوهش است.

خطی‌سازی مدل. در تابع هدف، حاصل ضرب یک متغیر باینری و یک متغیر پیوسته وجود دارد و غیرخطی است. بر اساس روش پیترسن^۱ (۱۹۷۱)، با اضافه کردن متغیر $\rho_{ijs}^k = Q_{ijs} U_{ijs}^k$ به فرم خطی تبدیل می‌شود [۴۲]. ابتدا برای متغیر پیوسته Q_{ijs} یک کران بالا و پایین به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$Lq_{ijs} \leq Q_{ijs} \leq Uq_{ijs} \quad \text{رابطه (۳۳)}$$

محدودیت‌های زیر باید به مدل اضافه شوند تا مقادیر متغیرها را تنظیم کنند:

$$Lq_{ijs} \cdot U_{ijs}^k \leq \rho_{ijs}^k \leq Uq_{ijs} \cdot U_{ijs}^k \quad \text{رابطه (۳۴)}$$

$$Lq_{ijs} \cdot (1 - U_{ijs}^k) \leq Q_{ijs} - \rho_{ijs}^k \leq Uq_{ijs} \cdot (1 - U_{ijs}^k) \quad \text{رابطه (۳۵)}$$

هزینه خرید در تابع هدف به صورت رابطه ۳۶، بازنویسی می‌شود:

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{s=1}^S \sum_{k=1}^K \rho_{ijs}^k \cdot P_{ijs}^k \quad \text{رابطه (۳۶)}$$

مدل بهینه‌سازی استوار. بهینه‌سازی استوار در اوایل دهه ۱۹۷۰ برای مقابله با عدم قطعیت داده‌ها معرفی شد و برای تعیین راه‌حلی که در برابر نوسانات پارامترها (داده‌های ورودی) پایدار است، به کار می‌رود. رویکردهای متعددی برای بهینه‌سازی استوار وجود دارد.

ربیع و همکاران (۲۰۱۱)، مسئله انتخاب تأمین‌کننده و تخصیص سفارش برای برنامه‌ریزی تأمین قطعات دو محصول از یک زنجیره تأمین در یک افق چنددوره‌ای را بررسی کردند. پارامترهای هزینه حمل‌ونقل و ظرفیت تأمین‌کنندگان، غیرقطعی هستند و از بهینه‌سازی استوار استفاده شده است. آن‌ها ۵ هدف را با رویکرد برنامه‌ریزی آرمانی مدلسازی کردند [۲۶]. منوچهری و همکاران (۲۰۱۹)، عدم قطعیت در تقاضا و هزینه حمل‌ونقل را با رویکرد بهینه‌سازی استوار ارائه‌شده توسط مالوی و همکاران (۱۹۹۵)، در طراحی زنجیره تأمین سبز در نظر گرفتند [۲۱]. در این پژوهش از رویکرد ارائه‌شده توسط مالوی^۱ و همکاران (۱۹۹۵)، استفاده شده است [۲۶]. در ادامه، این رویکرد به طور خلاصه معرفی می‌شود.

فرض کنید یک مدل برنامه‌ریزی خطی اولیه، به صورت زیر داده شده است:

$$\text{Min} \quad c^T x + d^T y \quad \text{رابطه (۳۷)}$$

Subject to :

$$Ax = b \quad \text{رابطه (۳۸)}$$

$$Bx + Cy = e \quad \text{رابطه (۳۹)}$$

$$x, y \geq 0 \quad \text{رابطه (۴۰)}$$

فرض کنید در مجموعه پارامترهای $\{B, C, e, d\}$ عدم قطعیت وجود دارد. محدودیت ۳۸، محدودیت ساختاری است که ضرایب قطعی و بدون اختلال دارد؛ اما محدودیت ۳۹، یک محدودیت کنترلی است که ضرایب تصادفی و تحت اختلال دارد. در بهینه‌سازی استوار، پارامترهای عدم قطعیت با مجموعه‌ای از سناریوهای $\Omega = \{1, 2, \dots, \Xi\}$ مدل می‌شوند؛ بنابراین مجموعه $\{B^\xi, C^\xi, e^\xi, d^\xi\}$ ، مجموعه‌ای از پارامترهای غیرقطعی وابسته به سناریو است و $\sum p^\xi = 1$ است که p^ξ احتمال وقوع سناریوی ξ است. احتمال سناریوها و مقدار

پارامترهای وابسته به آن‌ها بر اساس اطلاعات و داده‌های گذشته تعیین می‌شود. در برخی پژوهش‌ها بیان شده است که می‌توان مقدار پارامترها و احتمالات آن را بر مبنای نظر خبره به‌دست آورد.

متغیر وابسته به هر سناریو را «متغیر مرحله دوم» یا «متغیر کنترل» می‌گویند و متغیر مستقل از سناریو را که در هر سناریو تکرار می‌شود و قابل تغییر نیست، «متغیر مرحله اول» یا «متغیر طراحی» یا «متغیر منابع» می‌گویند. در مثال بالا، x بردار متغیر تصمیم و y بردار متغیر کنترل است. مدل بهینه‌سازی استوار به صورت زیر است [۲۸]:

$$\text{Min} \quad c^T x + \sum_{\xi \in \Omega} d^{\xi T} y^{\xi} + \lambda \sigma(y^1, y^2, \dots, y^{\Xi}) + \omega \rho(\delta^1, \delta^2, \dots, \delta^{\Xi}) \quad (41) \text{ رابطه}$$

Subject to :

$$Ax = b \quad (42) \text{ رابطه}$$

$$B^{\xi} x + C^{\xi} y + \delta^{\xi} = e^{\xi} \quad (43) \text{ رابطه}$$

$$x, y^{\xi} \geq 0, \xi \in \Omega \quad (44) \text{ رابطه}$$

هدف از این مدل، ایجاد تعادل بین استواری راه‌حل و مدل است. جواب بهینه این مدل از نظر بهینگی در صورتی پایدار است که برای هر سناریوی $\xi \in \Omega$ نزدیک بهینه باقی بماند (استواری راه‌حل)؛ همچنین راه‌حل از نظر موجه بودن، در صورتی استوار است که تقریباً برای هر سناریوی ξ شدنی باقی بماند (استواری مدل). پارامتر δ^{ξ} برای استواری مدل تعریف می‌شود که میزان نشدنی بودن محدودیت‌های کنترل تحت سناریوی ξ را اندازه‌گیری می‌کند و پارامتر ω جریمه پرداختی به‌ازای نقض یک محدودیت تحت یک سناریو است.

بر اساس چارچوب بالا، یک مدل بهینه‌سازی استوار برای مسئله تعریف شده در بخش قبل، ارائه می‌شود. در این مدل، خریده‌ها قبل از مشخص شدن تقاضا انجام می‌شود؛ بنابراین متغیرهای مرتبط با سفارش، خرید و حمل‌ونقل، مستقل از سناریو هستند. پارامتر تقاضای محصول و متغیرهای سطح موجودی، مقدار تقاضای برآورده شده، مقدار جایگزینی، مقدار پس‌افت و فروش از دست‌رفته مبتنی بر سناریوهای عدم قطعیت هستند. در این پژوهش از یک فرم جریمه مطلق برای اندازه‌گیری پایداری راه‌حل در تابع هدف استفاده شده است [۲۸]. مدل بهینه‌سازی استوار توسعه داده شده برای مسئله اشاره شده به صورت زیر است:

$$\text{Min} \quad \sum_{\xi=1}^{\Xi} p^{\xi} Z_1^{\xi} + \lambda \sum_{\xi=1}^{\Xi} p^{\xi} \left| Z_1^{\xi} - \sum_{\xi'=1}^{\Xi} p^{\xi'} Z_1^{\xi'} \right| + \omega \sum_{\xi=1}^{\Xi} \sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^L p^{\xi} \delta_{i\xi}^l \quad (45) \text{ رابطه}$$

$$\begin{aligned}
 Z_1^\xi = & \sum_{j=1}^J \sum_{s=1}^S A_s r_{js} + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{s=1}^S a_{ijs} w_{ijs} + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{s=1}^S \sum_{k=1}^K \rho_{ijs}^k P_{ijs}^k \\
 & + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J h_i I_{ij\xi}^+ + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^L \pi_i^l I_{ij\xi}^{l-} + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^L \bar{\pi}_i^l (1 - \beta_i^l) (D_{ij\xi}^l - E_{ij\xi}^l - \sum_{v \in C_i} x_{ivj\xi}^l) \\
 & + \sum_{j=1}^J \sum_{s=1}^S \sum_o \lambda_{jso} f_{jso} + \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^I \sum_{v \in C_i} \alpha_{iv}^l x_{ivj\xi}^l
 \end{aligned} \quad \text{رابطه (۴۶)}$$

$$I_{ij\xi}^+ = I_{i(j-1)\xi}^+ + \sum_{s=1}^S Q_{ijs} - \sum_{l=1}^L d_{ij\xi}^l - \sum_{l=1}^L E_{ij\xi}^l - \sum_{l=1}^L \sum_{v \in C_i} x_{vij\xi}^l \quad \forall i, j, \xi \quad \text{رابطه (۴۷)}$$

$$d_{ij\xi}^l \leq I_{i(j-1)\xi}^{l-} \quad \forall i, j, l, \xi \quad \text{رابطه (۴۸)}$$

$$x_{ivj\xi}^l \leq (D_{ij\xi}^l - E_{ij\xi}^l) \gamma_{iv}^l \quad \forall i, v, j, l, \xi \quad \text{رابطه (۴۹)}$$

$$I_{ij\xi}^{l-} = I_{i(j-1)\xi}^{l-} + \beta_i^l (D_{ij\xi}^l - E_{ij\xi}^l - \sum_{v \in C_i} x_{ivj\xi}^l) - d_{ij\xi}^l \quad \forall i, j, l, \xi \quad \text{رابطه (۵۰)}$$

$$I_{iJ\xi}^{l-} = \delta_{i\xi}^l \quad \forall i, l, \xi \quad \text{رابطه (۵۱)}$$

همه محدودیت‌های موجود در مدل اصلی، به جز محدودیت‌های ۱۸ تا ۲۱، عبارات اول و دوم در تابع هدف ۴۵، به‌ترتیب میانگین و واریانس کل هزینه‌ها هستند و استواری راه‌حل را اندازه‌گیری می‌کنند. عبارت سوم در تابع هدف ۴۵، استواری مدل را با توجه به غیرموجه بودن محدودیت‌های کنترل ۵۱، تحت سناریو ξ اندازه‌گیری می‌کند.

با توجه به ساختار مدل، تنها محدودیتی که ممکن است در برخی سناریوهای تقاضا نقض شود، محدودیت تأمین همه تقاضاهای پس‌افت تا پایان افق برنامه‌ریزی است؛ بنابراین جریمه غیرموجه بودن جواب فقط برای مثبت بودن تقاضای پس‌افت تحویل‌نشده در انتهای افق برنامه‌ریزی لحاظ شده است.

با اینکه عبارت ۴۵، یک تابع غیرخطی است، می‌توان با معرفی متغیر غیرمنفی θ^ξ مسئله را به یک مدل برنامه‌ریزی خطی تبدیل کرد که تابع هدف خطی و محدودیت جدید به‌صورت زیر است:

$$\text{Min} \quad \sum_{\xi=1}^{\Xi} p^\xi Z_1^\xi + \lambda \sum_{\xi=1}^{\Xi} p^\xi \left[(Z_1^\xi - \sum_{\xi'=1}^{\Xi} p^{\xi'} Z_1^{\xi'}) + \tau \theta^\xi \right] + \omega \sum_{\xi=1}^{\Xi} \sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^L p^\xi \delta_{i\xi}^l \quad \text{رابطه (۵۲)}$$

$$Z_1^\xi - \sum_{\xi'=1}^{\Xi} p^{\xi'} Z_1^{\xi'} + \theta^\xi \geq 0 \quad \forall \xi, \quad \text{رابطه (۵۳)}$$

$$\theta^{\xi} \geq 0, \quad \forall \xi. \quad \text{رابطه (۵۴)}$$

۴. تحلیل داده‌ها و یافته‌های پژوهش

مثال عددی. در این بخش با یک مثال عددی، استواری و اثربخشی مدل بررسی خواهد شد. در این مثال با در نظر گرفتن یک کسب‌وکار، سفارش ۵ نوع محصول در ۳ دوره از ۳ تأمین‌کننده که هر کدام سیاست تخفیف برای تمامی واحدها با ۳ نقطه شکست قیمت ارائه می‌دهند، تعیین می‌شود. پارامترهای مورد استفاده در این مثال در جدول‌های ۲ تا ۸ آورده شده است. برای پارامتر تقاضا، ۶ سناریو در نظر گرفته شده که احتمال وقوع آن‌ها به ترتیب ۰/۱، ۰/۲۲، ۰/۱۲، ۰/۲، ۰/۲۸ و ۰/۰۸ است.

جدول ۲. مقادیر پارامترهای اسکالر

نماد	g_i	A_s	a_{ijs}	h_i	π_i^l	$\bar{\pi}_i^l$	α_{iv}^l
مقدار	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰	۱۰۰

پارامتر β_i^l نیز طبق جدول ۳، مقدار می‌گیرد.

جدول ۳. مقدار ورودی β_i^l

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$
β_i^1	۰/۷	۰/۷	۰/۴	۰/۵	۰/۴
β_i^2	۰/۴	۰/۴	۰/۶	۰/۹	۰/۷

جدول ۴. نقاط تخفیف

کالا	تأمین‌کننده								
	۱			۲			۳		
	۱	۲	۳	۱	۲	۳	۱	۲	۳
۱	۵۰	۹۵	۱۵۰	۶۰	۱۰۰	۱۶۰	۴۰	۸۵	۱۳۰
۲	۲۰	۷۰	۱۴۰	۲۵	۹۰	۱۶۰	۳۰	۸۰	۱۵۵
۳	۳۰	۹۰	۱۷۰	۲۰	۷۵	۱۶۰	۲۵	۱۰۰	۱۳۰
۴	۴۰	۸۰	۱۴۰	۵۰	۱۰۰	۱۵۰	۴۵	۷۵	۱۶۰
۵	۱۰	۹۰	۱۲۰	۳۰	۷۰	۱۱۰	۴۰	۸۵	۱۴۵

فرض شده که سیاست تخفیف تأمین‌کنندگان در همه دوره‌ها یکسان است.

جدول ۵. هزینه خرید

		تأمین کننده								
کالا	دوره									
		۱			۲			۳		
		نقاط شکست قیمت								
		۱	۲	۳	۱	۲	۳	۱	۲	۳
۱	۱	۹۰	۶۰	۴۵	۹۰	۶۵	۴۰	۱۰۵	۷۰	۳۰
	۲	۸۰	۵۵	۳۵	۸۰	۷۰	۴۵	۹۰	۷۵	۴۰
	۳	۱۰۰	۶۵	۳۰	۸۵	۶۰	۴۰	۱۰۰	۷۰	۳۵
۲	۱	۹۰	۶۵	۵۵	۱۰۰	۸۰	۵۵	۹۵	۶۵	۵۵
	۲	۸۰	۷۰	۶۰	۹۰	۸۵	۶۰	۷۵	۷۰	۶۵
	۳	۸۵	۷۰	۵۰	۸۵	۷۵	۵۵	۸۵	۶۵	۶۰
۳	۱	۸۵	۶۵	۵۰	۱۰۰	۸۰	۵۰	۱۰۰	۷۵	۶۵
	۲	۹۵	۶۵	۴۵	۸۰	۷۰	۶۵	۹۵	۸۰	۵۵
	۳	۹۰	۷۵	۵۵	۷۰	۶۵	۶۰	۱۱۰	۸۵	۴۰
۴	۱	۹۵	۸۵	۳۵	۹۵	۸۵	۴۵	۹۵	۷۵	۴۵
	۲	۱۰۰	۷۵	۴۵	۹۰	۸۰	۶۰	۹۰	۶۰	۳۵
	۳	۸۵	۶۵	۵۵	۹۵	۷۵	۵۵	۹۵	۶۵	۵۵
۵	۱	۸۵	۸۰	۳۰	۸۰	۸۵	۵۵	۱۰۰	۸۵	۴۰
	۲	۹۵	۷۰	۴۰	۹۰	۸۰	۶۰	۱۱۰	۵۵	۴۵
	۳	۸۰	۷۵	۵۰	۱۰۰	۷۵	۶۵	۹۵	۹۰	۵۰

جدول ۶. نقاط شکست تابع هزینه حمل و نقل

نقاط شکست			
۱	۲	۳	۴
۰	۵۰۰	۸۰۰	۲۰۰۰
۰	۱۰۰۰	۱۶۰۰	۲۰۰۰

فرض بر این است که نقاط شکست تابع وزن همه تأمین‌کنندگان در همه دوره‌ها مشابه است.

جدول ۷. درصد جایگزینی تقاضای کالای i با v

کلاس	کالای i	کالای v				
		۱	۲	۳	۴	۵
۱	۱		۰/۴	۰/۲	۰/۳	۰/۴
	۲	۰/۲		۰/۱	۰/۱	۰/۱
	۳	۰/۴	۰/۵		۰/۴	۰/۶
	۴	۰/۲	۰/۳	۰/۵		۰/۴
	۵	۰/۱	۰/۵	۰/۲	۰/۲	
۲	۱		۰/۶	۰/۴	۰/۱	۰/۲
	۲	۰/۲		۰/۶	۰/۴	۰/۴
	۳	۰/۳	۰/۱		۰/۲	۰/۴
	۴	۰/۳	۰/۲	۰/۲		۰/۶
	۵	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۱	

جدول ۸. پیش‌بینی تقاضا

کلاس l	کالای i	دوره z	سناریوی ξ					
			۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	۱	۱	۵۹	۹۴	۳۱	۶۵	۹۹	۴۹
		۲	۱۳	۶۷	۳۳	۸۱	۵۶	۶۲
		۳	۱۶	۶۶	۳۷	۹۱	۸۳	۳۸
		۱	۱۷	۱۷	۳۲	۸	۸۴	۵۶
		۲	۴۵	۲۹	۲۵	۱۳	۶۳	۶۰
۲	۳	۳	۶۹	۱۰۰	۲۸	۴۸	۷۳	۲۵
		۱	۵۷	۶۷	۹۸	۸۸	۹۰	۷۴
		۲	۳۹	۳	۶۲	۴۹	۷۶	۳۰
		۳	۵۴	۲۷	۹۲	۲۸	۳۲	۱۹
		۱	۷۸	۷۱	۴	۴	۵۴	۶
۳	۴	۲	۶۶	۱۸	۶۵	۳	۱۳	۷۷
		۳	۵۸	۷۳	۵۰	۷۷	۳۸	۱۶
		۱	۸۹	۵۲	۶۱	۳۱	۶۲	۵۱
		۲	۴۸	۳	۷۵	۲۱	۷۳	۴۷
		۳	۳۱	۷۲	۷	۴۹	۷۲	۷۳
۴	۱	۱	۴۶	۱۶	۴۷	۲۸	۶۱	۴۳
		۲	۶۶	۱۱	۳	۲۹	۲۱	۵۶
		۳	۴	۱۴	۸۲	۲۲	۳۶	۲
		۱	۸۸	۹۶	۶۳	۱۳	۱۸	۹۴
		۲	۹۱	۷۹	۶۸	۹۴	۵۵	۸۵

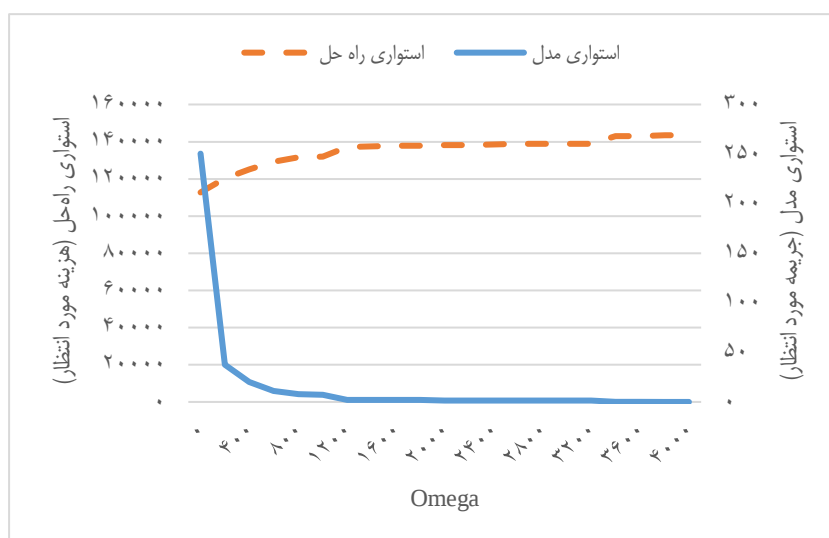
کلاس l	کالای i	دوره j	سناریوی ξ					
			۱	۲	۳	۴	۵	۶
۳		۳	۴۱	۵۸	۴۰	۲۶	۷۳	۲
		۱	۸۶	۴۶	۱۳	۸۷	۱۱	۵۶
		۲	۸	۸۱	۹	۸۹	۹۷	۵
۴		۳	۲۴	۴۹	۹۲	۴۰	۷۹	۶۲
		۱	۱۰۰	۱۸	۱	۲۶	۱۴	۷۹
		۲	۱۹	۶۰	۲۰	۵۸	۵۰	۸۰
۵		۳	۷۹	۳۷	۱۸	۴۹	۴۷	۶۳
		۱	۳۷	۵	۱۹	۶۶	۴۴	۹۲
		۲	۸۳	۳۶	۸۶	۶	۶۷	۱۶
		۳	۱۲	۱۴	۴۷	۲۸	۴	۹۹

نتایج حل مدل. برای حل مثال عددی از نرم‌افزار GAMS استفاده شده است. جدول ۹، مقادیر سفارش‌های صادره از هر کالا در هر دوره به هر تأمین‌کننده را نشان می‌دهد. به دلیل رعایت اختصار، مقدار بهینه سایر متغیرها ارائه نشده است.

جدول ۹. مقدار سفارش صادر شده

کالای i	دوره j	تأمین‌کننده s		
		۱	۲	۳
۱	۱			۹۹
	۲	۹۵/۲۵۱		
	۳	۹۹/۷۰۵		
۲	۱			۸۰
	۲			۸۰
	۳		۱۳۶/۱۷۱	
۳	۱	۱۰۸/۸		
	۲			
	۳			۱۱۲/۹۲۹
۴	۱			
	۲			۱۲۰
	۳			۸۷/۰۷۱
۵	۱	۹۱/۲		
	۲	۱۰۲/۰۶۹		
	۳			۱۰۰/۲۹۵

توازن بین استواری راه‌حل و استواری مدل. توازن بین استواری راه‌حل (از نظر بهینه‌بودن) و استواری مدل (از نظر موجه‌بودن) را با تغییرات ω در تابع هدف ۵۲، می‌توان بررسی کرد. همان‌طور که قبلاً ذکر شد، رویکرد بهینه‌سازی استوار، غیرموجه‌بودن محدودیت‌های کنترل را به‌وسیله جریمه امکان‌پذیر می‌کند. زمانی که ω برابر صفر در نظر گرفته شود، جریمه متناظر با استواری مدل به بالاترین مقدار خود می‌رسد. برای کاهش جریمه ناشی از غیرموجه‌بودن جواب، ω به تدریج افزایش می‌یابد و مدل بهینه‌سازی استوار پیشنهادی با ω های مختلف در مسئله موردنظر ارزیابی می‌شود. شکل ۱، توازن بین استواری راه‌حل و استواری مدل را نشان می‌دهد. با افزایش مقدار ω ، هزینه کل موردانتظار که با استواری راه‌حل مرتبط است، افزایش می‌یابد و جریمه متناظر با استواری مدل کاهش می‌یابد. این بدان معنا است که برای مقادیر بزرگ ω ، جواب به‌دست‌آمده برای هر سناریوی تحقق‌یافته ξ ، با پرداخت هزینه کل بیشتر، تقریباً نزدیک به شدنی است. با افزایش در مقدار ω ، جریمه متناظر با استواری مدل تا صفر کاهش می‌یابد. این نتایج با نتایج پژوهش مالی و همکاران (۱۹۹۵)، سازگار است.



شکل ۱. توازن بین استواری راه‌حل و استواری مدل

با توجه به ساختار مدل، فقط محدودیت تأمین همه تقاضاهای پس‌افت‌شده، امکان نقض شدن دارد؛ بنابراین جریمه استواری مدل مربوط به نقض شدن این محدودیت است. تعیین مقدار مطلوب برای ω به قضاوت تصمیم‌گیرنده بستگی دارد. مقادیر بزرگ‌تر برای ω به این معنا است که مدیریت ترجیح می‌دهد هزینه بیشتری را تحمل کند؛ اما در عوض، در اغلب سناریوهای ممکن، همه تقاضاهای پس‌افت‌شده تأمین شوند.

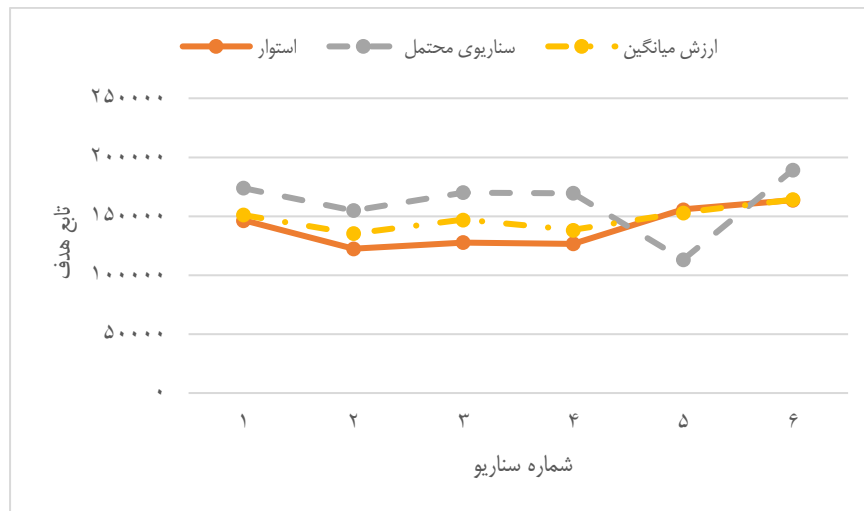
مقایسه کارایی مدل بهینه‌سازی استوار. برای بررسی کارایی مدل بهینه‌سازی استوار پیشنهادی، می‌توان آن را با دو رویکرد ساده (اما متداول) مقایسه کرد. رویکرد نخست برای مواجهه با عدم قطعیت تقاضا آن است که امید ریاضی تقاضا به عنوان تقاضای قطعی فرض شود. رویکرد دوم آن است که محتمل‌ترین سناریو به عنوان تقاضای قطعی در نظر گرفته شود. در هر دو صورت، مسئله قطعی حاصل با مدل قطعی حل می‌شود. این دو روش، «مدل قطعی با میانگین سناریوها» و «مدل قطعی با سناریوی محتمل» نامیده می‌شوند.

دو مدل قطعی یادشده حل شدند و مقدار بهینه متغیرها به دست آمد. آنگاه با توجه به اینکه در عمل ممکن است هر کدام از سناریوها رخ دهند، هزینه سیستم برای وقوع تک‌تک سناریوها محاسبه شد. جدول ۱۰ و شکل ۲، هزینه سیستم موجودی برای ۶ سناریوی وقوع تقاضا (تعریف شده در جدول ۸) را نشان می‌دهند. برای مثال، عدد $1/4$ در ستون سناریوی ۱ به این معنا است که اگر مقادیر بهینه سفارش‌ها با مدل استوار محاسبه شود و سناریوی ۱ در عمل رخ دهد، هزینه سیستم موجودی برابر $1/4$ (در مقیاس صدهزار) خواهد بود؛ همچنین عدد $1/7$ در ستون سناریوی ۱ به این معنا است که اگر پیش‌بینی تقاضا برابر با محتمل‌ترین سناریو در نظر گرفته شود و مقادیر بهینه سفارش‌ها با مدل قطعی محاسبه شود و سناریوی ۱ در عمل رخ دهد، هزینه سیستم موجودی برابر $1/7$ (در مقیاس صدهزار) خواهد بود.

با توجه به شکل ۲، هزینه کل مدل استوار در برابر تغییرات پارامتر تقاضا، نسبت به مدل قطعی با میانگین سناریوها و مدل قطعی با سناریوی محتمل، استوارتر است و جواب‌هایی را ارائه می‌دهد که نسبت به عدم قطعیت، کمتر حساس هستند. منحنی هزینه کل در مدل پیشنهادی تمایل به استواری بیشتری دارد؛ اما تغییرات هزینه کل برای میانگین سناریوها و سناریوی محتمل، بالاتر است. این مسئله نشان می‌دهد که رویکرد پیشنهادی برای هر سیستمی که استواری جواب در افزایش هزینه کل برای مدیران مهم است، کارایی دارد. درحقیقت برای چنین سیستمی داشتن یک راه‌حل با حداقل هزینه کل کافی نیست و تغییر در سناریوهای واقعی در آینده باید کم باشد.

جدول ۱۰. هزینه کل 10^5 مدل استوار، مدل قطعی با سناریوی محتمل و مدل قطعی با میانگین سناریوها

شماره سناریو	سناریو ۱	سناریو ۲	سناریو ۳	سناریو ۴	سناریو ۵	سناریو ۶
مدل استوار	$1/4$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/5$	$1/6$
مدل قطعی با سناریوی محتمل	$1/7$	$1/5$	$1/7$	$1/6$	$1/1$	$1/8$
مدل قطعی با میانگین سناریوها	$1/5$	$1/3$	$1/4$	$1/3$	$1/5$	$1/6$

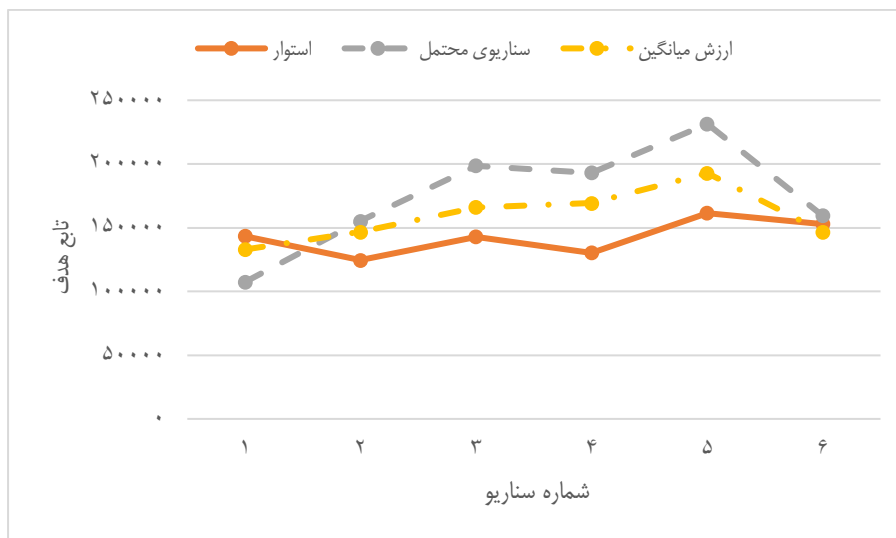


شکل ۲. مقایسه هزینه کل بین مدل استوار، مدل قطعی با سناریوی محتمل و مدل قطعی با میانگین سناریوها

احتمال وقوع سناریوها در مثال عددی به ترتیب $0/1$ ، $0/22$ ، $0/12$ ، $0/2$ ، $0/28$ و $0/08$ در نظر گرفته شده بود. برای بررسی بهتر عملکرد مدل استوار، احتمال وقوع سناریوها تغییر داده شد. جدول ۱۱ و شکل ۳، نتایج مدل برای ۶ سناریو با احتمال وقوع $0/48$ ، $0/9$ ، $0/1$ ، $0/05$ ، $0/16$ ، $0/12$ را نشان می‌دهند. مقایسه شکل‌های ۲ و ۳، توانایی مدل بهینه‌سازی استوار پیشنهادی را در دستیابی به راه‌حل استوار، زمانی که احتمال رخداد سناریوها تفاوت بیشتری دارند را تأیید می‌کند. نتایج مدل برای سناریوی با احتمال‌های $0/48$ ، $0/09$ ، $0/1$ ، $0/05$ ، $0/16$ و $0/12$ از نتایج مدل برای سناریوی با احتمال‌های $0/1$ ، $0/22$ ، $0/12$ ، $0/2$ ، $0/28$ و $0/08$ استواری بیشتری دارد؛ بنابراین نتایج محاسباتی، استواری و کارایی مدل پیشنهادی را نشان می‌دهد.

جدول ۱۱. هزینه کل 10^5 مدل استوار، مدل قطعی با سناریوی محتمل و مدل قطعی با میانگین سناریوها

شماره سناریو	سناریو ۱	سناریو ۲	سناریو ۳	سناریو ۴	سناریو ۵	سناریو ۶
مدل استوار	۱/۴	۱/۲	۱/۴	۱/۳	۱/۶	۱/۵
مدل قطعی با سناریوی محتمل	۱	۱/۵	۱/۹	۱/۹	۲/۳	۱/۵
مدل قطعی با میانگین سناریوها	۱/۳	۱/۴	۱/۶	۱/۶	۱/۹	۱/۴



شکل ۳. مقایسه هزینه کل بین مدل استوار، مدل قطعی با سناریوی محتمل و مدل قطعی با میانگین سناریوها

۵. نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این پژوهش یک مدل بهینه‌سازی استوار برای مسئله تعیین اندازه سفارش و انتخاب تأمین‌کننده با هدف حداقل کردن کل هزینه‌های خرید و موجودی، توسعه داده شد. چند محصول، چند دوره و چند تأمین‌کننده در نظر گرفته شدند. به دلیل تطبیق با شرایط دنیای واقعی، تقاضا به صورت تصادفی و دارای چند کلاس در نظر گرفته شد. نتایج به دست آمده از مدل استوار نشان‌دهنده برتری مدل استوار نسبت به ارزش موردانتظار از پارامتر عدم قطعیت در مدل برنامه‌ریزی قطعی است.

مدل ریاضی ارائه شده نشان می‌دهد که یکپارچگی انتخاب تأمین‌کننده و سفارش‌دهی محصولات، بهتر از بررسی جداگانه دو مسئله است. وقتی هزینه حمل و نقل کالاها از تأمین‌کننده تا انبار شرکت به وزن کل محموله بستگی دارد و هزینه سفارش‌دهی نیز دو بخش مستقل از کالا و وابسته به کالا دارد، یکپارچگی انتخاب تأمین‌کننده و تخصیص سفارش، اهمیت بالاتری دارد.

دو روش شهودی برای مواجهه با عدم قطعیت تقاضا آن است که متوسط تقاضا یا محتمل‌ترین مقدار تقاضا مبنای تصمیم‌گیری درباره انتخاب تأمین‌کننده و تخصیص سفارش‌ها قرار داده شود؛ اما تحلیل‌های انجام شده در این پژوهش نشان داد که تصمیم‌گیری بر اساس محتمل‌ترین مقدار تقاضا یا متوسط تقاضا، جواب‌هایی تولید می‌کند که استوار نیستند.

مدل ارائه شده در این پژوهش دارای مفروضات و محدودیت‌هایی است که در پژوهش‌های آتی قابلیت بررسی و توسعه دارند:

- قیمت فروش قطعات بر تقاضای آن‌ها مؤثر است. در پژوهش‌های بعدی می‌توان قیمت‌گذاری را با تعیین اندازه انباشته سفارش و انتخاب تأمین‌کننده، یکپارچه کرد.
- در پژوهش حاضر پس‌افت تقاضا برای قطعات جایگزین رخ نمی‌دهد؛ اما در عمل ممکن است به‌نفع فروشنده باشد که تقاضای پس‌افت‌شده یک مشتری از یک کالا را با یک کالای جایگزین تأمین کند. برای مثال، ممکن است فروشنده تلاش کند تقاضاهای تأمین‌نشده مشتریان از چند کالای مشابه را در یکی از این کالاها تجمیع کند تا در هزینه سفارش، خرید، و حمل‌ونقل صرفه‌جویی کرده باشد.
- دوره تأمین قطعات به‌صورت قطعی فرض شده است. می‌توان عدم‌قطعیت در دوره تأمین را نیز در نظر گرفت.
- کالاهای دریافتی بدون نقص در نظر گرفته شده‌اند. وجود نقص کیفی در کالاهای دریافتی را نیز می‌توان لحاظ کرد.
- تخمین احتمال وقوع سناریوهای ممکن تقاضا می‌تواند با چالش همراه باشد. اندازه‌گیری احتمال وقوع سناریوها به‌صورت فازی می‌تواند این چالش را کمتر کند.

منابع

1. Aggarwal, R., & Singh, S. P. (2015). Chance constraint-based multi-objective stochastic model for supplier selection. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 79(9-12), 1707-1719.
2. Alfares, H. K., & Turnadi, R. (2018). Lot sizing and supplier selection with multiple items, multiple periods, quantity discounts, and backordering. *Computers & Industrial Engineering*, 116, 59-71.
3. Alfieri, A., Pastore, E., & Zotteri, G. (2017). Dynamic inventory rationing: How to allocate stock according to managerial priorities. An empirical study. *International Journal of Production Economics*, 189, 14-29.
4. Aouadni, S., Aouadni, I., & Rebaï, A. (2019). A systematic review on supplier selection and order allocation problems. *Journal of Industrial Engineering International*, 15, 267-289.
5. Azadnia, A. H. (2016). A multi-objective mathematical model for sustainable supplier selection and order lot-sizing under inflation. *International Journal of Engineering-Transactions B: Applications*, 29(8), 1141.
6. Bao, L., Liu, Z., Yu, Y., & Zhang, W. (2018). On the decomposition property for a dynamic inventory rationing problem with multiple demand classes and backorder. *European Journal of Operational Research*, 265(1), 99-106.
7. Buschkühl, L., Sahling, F., Helber, S., & Tempelmeier, H. (2010). Dynamic capacitated lot-sizing problems: a classification and review of solution approaches. *Or Spectrum*, 32(2), 231-261.
8. Chen, S., Xu, J., & Feng, Y. (2010). A partial characterization of the optimal ordering/rationing policy for a periodic review system with two demand classes and backordering. *Naval Research Logistics (NRL)*, 57(4), 330-341.
9. Cheraghalipour, A., & Farsad, S. (2018). A bi-objective sustainable supplier selection and order allocation considering quantity discounts under disruption risks: A case study in plastic industry. *Computers & Industrial Engineering*, 118, 237-250.
10. Choudhary, D., & Shankar, R. (2013). Joint decision of procurement lot-size, supplier selection, and carrier selection. *Journal of Purchasing and Supply Management*, 19(1), 16-26.
11. Choudhary, D., & Shankar, R. (2014). A goal programming model for joint decision making of inventory lot-size, supplier selection and carrier selection. *Computers & Industrial Engineering*, 71, 1-9.
12. Ding, Q., Kouvelis, P., & Milner, J. M. (2007). Dynamic pricing for multiple class deterministic demand fulfillment. *IIE Transactions*, 39(11), 997-1013.
13. Gebennini, E., Zeppetella, L., Grassi, A., & Rimini, B. (2015). Production scheduling to optimize the product assortment in case of constrained capacity and customer-driven substitution. *IFAC-PapersOnLine*, 48(3), 1954-1959.
14. Ghaniabadi, M., & Mazinani, A. (2017). Dynamic lot sizing with multiple suppliers, backlogging and quantity discounts. *Computers & Industrial Engineering*, 110, 67-74.
15. Horri, M.S., & Anjomshoa, A. (2016). Multi-Objective Mathematical Model for Supplier Selection and Order Allocation under Multi-Item Condition. *Journal of Industrial Management Perspective*, 6(1), 153-179 (In Persian).
16. Hung, Y. F., & Hsiao, J. Y. (2013). Inventory rationing decision models during replenishment lead time. *International Journal of Production Economics*, 144(1), 290-300.

17. Jans, R., & Degraeve, Z. (2008). Modeling industrial lot sizing problems: a review. *International Journal of Production Research*, 46(6), 1619-1643.
18. Khosroabadi, M., Lotfi, M., & Khademizare, H. (2014). Joint supplier selection and order lot-sizing problem of remanufacturable items with price and transportation cost discounts. *Journal of Industrial Engineering Research in Production Systems*, 1(2), 139-153 (In Persian).
19. Lee, A. H., Kang, H. Y., & Lai, C. M. (2013). Solving lot-sizing problem with quantity discount and transportation cost. *International journal of systems science*, 44(4), 760-774.
20. Li, H., & Thorstenson, A. (2014). A multi-phase algorithm for a joint lot-sizing and pricing problem with stochastic demands. *International Journal of Production Research*, 52(8), 2345-2362.
21. Manouchehri, S., Tajdin, A., & Shirazi, B. (2019). Robust Integrated Optimization for Green Closed Loop Supply Chain. *Journal of Industrial Management Perspective*, 9(3), 55-85 (In Persian).
22. Minner, S. (2009). A comparison of simple heuristics for multi-product dynamic demand lot-sizing with limited warehouse capacity. *International Journal of Production Economics*, 118(1), 305-310.
23. Mulvey, J. M., Vanderbei, R. J., & Zenios, S. A. (1995). Robust optimization of large-scale systems. *Operations research*, 43(2), 264-281.
24. Nourmohamadi Shalke, P., Paydar, M. M., & Hajiaghaei-Keshteli, M. (2018). Sustainable supplier selection and order allocation through quantity discounts. *International Journal of Management Science and Engineering Management*, 13(1), 20-32.
25. Pasandideh, S. H. R., Niaki, S. T. A., & Mousavi, S. M. (2013). Two metaheuristics to solve a multi-item multiperiod inventory control problem under storage constraint and discounts. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 69(5-8), 1671-1684.
26. Rabieh, M., Azar, A., Yazdi, M.M., & Haghighi, M.F.F. (2011). Designing a Multi-Objective Resource-Based Mathematical Modeling: An Approach to Supply Chain Risk Reduction (Case Study: Iran Khodro Supply Chain). *Journal of Industrial Management Perspective*, 1(1), 57-77 (In Persian).
27. Rabieh, M., & Esmaelian, M. (2012). Designing a Fuzzy Non-Linear Model of Supplier Selection in Case of Multiple Sourcing. *Journal of Industrial Management Perspective*, 1(4), 81-105 (In Persian).
28. Rahmani, D., Ramezani, R., Fattahi, P., & Heydari, M. (2013). A robust optimization model for multi-product two-stage capacitated production planning under uncertainty. *Applied Mathematical Modelling*, 37(20-21), 8957-8971.
29. Rossi, R., Tarim, S. A., & Bollapragada, R. (2012). Constraint-based local search for inventory control under stochastic demand and lead time. *INFORMS journal on computing*, 24(1), 66-80.
30. Sambatt, M., Woarawichai, C., & Naenna, T. (2019). Inventory lot sizing and supplier selection for multiple products, multiple suppliers, multiple periods with storage space using lingo program. In MATEC Web of Conferences (Vol. 259). EDP Sciences.
31. Shin, H., Park, S., Lee, E., & Benton, W. C. (2015). A classification of the literature on the planning of substitutable products. *European Journal of Operational Research*, 246(3), 686-699.

32. Soto, A. V., Chowdhury, N. T., Allahyari, M. Z., Azab, A., & Baki, M. F. (2017). Mathematical modeling and hybridized evolutionary LP local search method for lot-sizing with supplier selection, inventory shortage, and quantity discounts. *Computers & Industrial Engineering*, 109, 96-112.
33. Topkis, D. M. (1968). Optimal ordering and rationing policies in a nonstationary dynamic inventory model with n demand classes. *Management Science*, 15(3), 160-176.
34. Wagner, H. M., & Whitin, T. M. (1958). Dynamic version of the economic lot size model. *Management science*, 5(1), 89-96.
35. Wan, G., & Cao, Y. (2018). A continuous cost evaluation approach for periodic review inventory systems with threshold rationing policy. *Computers & Industrial Engineering*, 126, 75-87.
36. Wang, D., & Tang, O. (2014). Dynamic inventory rationing with mixed backorders and lost sales. *International Journal of Production Economics*, 149, 56-67.
37. Wang, L., & Li, J. (2019). A Robust Weighted Goal Programming Approach for Supplier Selection Problem with Inventory Management and Vehicle Allocation in Uncertain Environment. In *International Conference on Management Science and Engineering Management* (pp. 295-309). Springer, Cham.
38. Yu, C. S., & Li, H. L. (2000). A robust optimization model for stochastic logistic problems. *International journal of production economics*, 64(1-3), 385-397.
39. Yücel, E., Karaesmen, F., Salman, F. S., & Türkay, M. (2009). Optimizing product assortment under customer-driven demand substitution. *European Journal of Operational Research*, 199(3), 759-768.
40. Zanjani, M. K., Ait-Kadi, D., & Noureldath, M. (2010). Robust production planning in a manufacturing environment with random yield: A case in sawmill production planning. *European Journal of Operational Research*, 201(3), 882-891.
41. Zhang, J. L., & Zhang, M. Y. (2011). Supplier selection and purchase problem with fixed cost and constrained order quantities under stochastic demand. *International Journal of Production Economics*, 129(1), 1-7.
42. Petersen, Clifford C. (1971). A Note on Transforming the Product of Variables to Linear Form in Linear Programs. Working Paper, Purdue University.